

## شناسایی مکان، زمان فعالیت و شدت منبع آلاینده نامشخص در رودخانه

اکرم ده‌مردان (akram.dahmardan@modares.ac.ir)

دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس

مهدی مظاهری\*

استادیار گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس

جمال محمدولی سامانی (samani\_j@modares.ac.ir)

استاد گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس

(تاریخ دریافت ۱۳۹۶/۹/۲۸ - تاریخ پذیرش ۱۳۹۷/۲/۲۴)

### چکیده

در سال‌های اخیر، با افزایش جمعیت و توسعه روزافزون صنعت، بیشتر منابع آب جهان، اعم از رودخانه‌ها، دریاچه‌ها و آب‌های زیرزمینی آلوده شده‌اند؛ این امر سبب ایجاد مسائل و مشکلات بهداشتی چشمگیری برای انسان و سایر موجودات زنده شده است. در صورت ادامه این وضعیت، بشر با بحران کمبود آب و مخاطرات جبران‌ناپذیر مواجه خواهد شد. کنترل پیوسته منبع آلاینده، سبب جلوگیری از آلودگی آب می‌شود. با اجرای اقداماتی پیش از وقوع با هدف کاهش مخاطرات محیطی، می‌توان هزینه‌های تحمیل شده را به شدت کاهش داد و بحران را مدیریت کرد. مهم‌ترین راه حفظ کیفیت منابع آب و کنترل آن، تدوین قوانین و استانداردهای مناسب و سختگیرانه و برنامه‌ریزی برای اجرای صحیح آن است. کیفیت آب رودخانه‌ها باید به صورت مستمر پایش شود، چراکه برخی صنایع به دلیل وجود محدودیت‌ها، اغلب به صورت نامحسوس و ناگهانی آلاینده‌ای با غلظت زیاد را وارد رودخانه می‌کنند. تعیین زمان و مکان آلاینده‌ای که در گذشته رها شده است، می‌تواند در محافظت از رودخانه‌ها بسیار کمک‌کننده باشد. هدف اصلی این تحقیق، شناسایی مکان منبع آلاینده در رودخانه بدون داشتن هیچ‌گونه اطلاعات پیشینی از منبع در چارچوب کاملاً ریاضی است. مزیت مدل بازگشتی ارائه‌شده آن است که تنها با برداشت منحنی غلظت-زمان از دو نقطه بالادست و پایین‌دست منبع آلاینده، می‌توان مکان منبع را با بیشترین دقت به دست آورد. پس از به دست آوردن مکان منبع، شدت منبع آلاینده بازیابی می‌شود. این تحقیق، ضریب‌های جریان خطا را بررسی کرده است تا خطای حاصل در نتایج شناسایی مکان و بازیابی شدت منبع آلاینده مشاهده شود. نتیجه نشان داد که این مدل به خطای ضریب‌ها حساس نیست. صحت‌سنجی بین حالت دقیق و نتایج حاصل از مدل معکوس با دقت مناسبی قابل قبول بود.

**واژه‌های کلیدی:** بازیابی شدت منبع آلاینده نقطه‌ای، حل معکوس، شناسایی مکان منبع آلاینده نقطه‌ای، کنترل منبع آلاینده.

\* نویسنده مسئول

## مقدمه

آب سالم و پاک، از مهم‌ترین نیازهای اساسی موجودات زنده است. آب مایه حیات است، اما آلوده شدن آن ممکن است منشأ ویرانی و تباهی باشد. آلودگی آب عبارت است از «تغییر مواد محلول، معلق یا تغییر درجه حرارت و دیگر خواص فیزیکی، شیمیایی یا بیولوژیکی آب، در حدی که آن را برای مصرفی که برای آن مقرر است، مضر یا غیرمفید سازد». ماده آلاینده عبارت است از: «هر نوع ماده یا عامل فیزیکی، شیمیایی یا بیولوژیکی که سبب آلودگی آب گردیده و یا به آلودگی آن بیفزاید» [۶].

مسائل معکوس<sup>۱</sup> در زمینه‌های متعددی از علوم و مهندسی به‌خوبی درخشیده‌اند، مانند تعیین کانون یک زلزله در علم زلزله‌شناسی و تصویربرداری نوری پزشکی و غیره. کاربرد دیگری از مسئله معکوس در ارتباط با محیط زیست است که می‌تواند به‌صورت مقابل توصیف شود: آلودگی مناطق خاص آب مانند آب‌های زیرزمینی و آب‌های سطحی را می‌توان با تعبیه برخی حسگرها بررسی کرد [۱۱]. مدلسازی معکوس یک پدیده، به‌طور معمول مشکل‌تر از مدلسازی مستقیم آن است [۸]. پژوهشگران متعددی به بررسی مسئله مورد نظر پرداخته‌اند. پیشینه تحقیقات در زمینه بازسازی غلظت آلاینده رهاشده تحت بررسی به‌شرح زیر است. در این رویکرد اغلب مکان و زمان رهاسازی آلاینده مشخص بوده و مدل تنها به دنبال بازسازی اتفاقات گذشته است [۱۷].

*Neupauer et al.* مقایسه‌ای بین روش‌های تیخونوف<sup>۲</sup> و  $MRE^3$  انجام دادند [۲۰]. *Atmadja and Bagtezoglu* با استفاده از روش  $BBE^4$  که در حقیقت برای حل مسائل سهموی در بازه‌های زمانی طولانی ارائه شده بود، توانستند معادله انتقال را به‌صورت معکوس حل کنند [۴]. آنها نیز مقایسه‌ای بین روش‌های  $MJBBE^5$  و QR برای وارونگی هیدرولوژیکی و به‌طور خاص برای بازسازی توزیع مکانی توده آلاینده ارائه کردند [۵]. *Zhang and Chen* منبع آلاینده را در یک کابین محصور هواپیما، فقط با استفاده از یک حسگر در پایین‌دست منبع آلاینده، توسط روش QR زمانی که غلظت آلاینده نسبت به زمان پیک است شناسایی کردند [۲۶]. *Wang and Liu* حل معکوس معادله انتقال در رودخانه را در چارچوب ریاضی بررسی کردند [۲۴]. آنها با استفاده از اطلاعات از قبل معلوم، روش تحلیلی را برای شناسایی منبع آلاینده نقطه‌ای و در یک بعد ارائه کردند [۲۵]. روش تحلیلی مذکور نیازمند اطلاعات رصدشده

- 
1. Inverse problems
  2. Tikhonov regularization
  3. Minimum Relative Entropy
  4. Backward Beam Equation
  5. Marching-Jury Backward Beam Equation

از نقاطی متمایز در طول رودخانه است. Mazaheri *et al.* مسئله برگشتی را در چارچوب ریاضی و با استفاده از کاربرد تابع گرین حل کردند. مدل پیشنهادشده قادر به بازسازی غلظت رهاشده براساس روش تنظیم تیخونوف است [۱۹].

در ادامه به پیشینه تحقیقاتی درباره بازسازی مکان یا زمان آلاینده رهاشده از منبع پرداخته می‌شود. در این رویکرد، شناسایی مکان و زمان رهاسازی آلاینده بررسی می‌شود:

Ling *et al.* مکان منبع ناشناخته را با استفاده از معادلات دوبعدی گرما با اندازه‌گیری‌های پراکنده به‌صورت یکتا شناسایی کردند [۱۶]. Milnes and Perrochet روشی را برای تشخیص منبع آلاینده در سفره‌های آب زیرزمینی در حالت غیرهمگن و چندبعدی در شرایط محدودکننده ارائه دادند [۱۸]. Cheng and Jia مدل احتمالاتی برگشتی جزء کمکی ارائه‌شده توسط Neupauer and Wilson را با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق، در پهنه‌های آب سطحی با شرایط جریان ماندگار و غیریکنواخت در حالت دوبعدی به‌کار بردند [۲۰، ۱۷]. Hamdi *et al.* حدود فعالیت زمانی مرتبط با برخی منابع ناشناخته را با کاربرد معادله جابه‌جایی-پراکندگی توسعه‌یافته خطی به‌صورت دوبعدی شناسایی کردند [۱۳]. قانع و همکاران روش احتمال برگشتی را برای تشخیص منابع آلاینده در رودخانه با شرایط غیریکنواخت و ماندگار استفاده کردند [۱]. آنها روش احتمال برگشتی ارائه‌شده برای شناسایی منبع آلودگی در آب‌های زیرزمینی را در شناسایی محل منبع آلاینده و زمان انتشار آلاینده در رودخانه به‌کار بردند [۱۰] و سپس مدل را با استفاده از راه‌حل‌های تحلیلی و برخی از داده‌های واقعی توسعه دادند [۲].

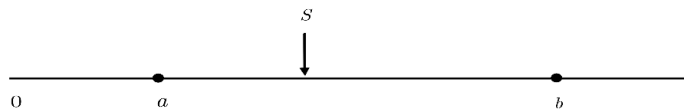
در پایان به بررسی تحقیقات پیشین پرداخته می‌شود که سعی در به‌دست آوردن همه مشخصات منبع آلاینده داشته‌اند:

El Badia *et al.* با در دست داشتن اطلاعاتی از منبع، روشی را برای یافتن مکان و تابع شدت یک منبع آلاینده در رودخانه ارائه کردند [۹]. Hamdi مسئله تشخیص منبع آلاینده نقطه‌ای را با استفاده از معادله خطی جابه‌جایی-پراکندگی با ضرایب ثابت به‌صورت یک‌بعدی در رودخانه بررسی کرد [۱۱]، وی توانست تحت فرضیه‌های محدودکننده و با دانستن اطلاعات پیشینی از منبع، مکان و تابع غلظت وابسته به زمان منبع را استخراج کند. او همچنین شناسایی یک منبع آلاینده نقطه‌ای را با استفاده از معادله انتقال توسعه‌یافته دوبعدی به‌صورت خطی انجام داد [۱۴]. او منبع مورد نظر را با در نظر گرفتن فرضیات محدودکننده و با اندازه‌گیری غلظت در مرز جریان خروجی از دامنه کنترل شناسایی کرد. وی و Mahfoudhi با استفاده از معادله کلی انتقال به‌صورت یک‌بعدی و با در نظر گرفتن ضرایب متغیر مکانی جریان و داشتن اطلاعات پیشینی در مورد منبع توانستند منبع را شناسایی کنند [۱۲].

در این تحقیق با استفاده از تکنیک‌های موجود در علم مسئله معکوس، سعی بر این است که مجهولات مسئله به صورت معین، در چارچوب ریاضی حل شوند. این روش به محاسبات سنگین در قالب حلقه‌های تکرار نیاز ندارد. از سوی دیگر مطالعات انجام گرفته با هدف تشخیص منبع آلاینده با داشتن اطلاعات پیشینی از منبع صورت گرفته است، در صورتی که در این تحقیق به هیچ اطلاعاتی درباره منبع آلاینده در زمان قبل نیاز نیست و تنها با برداشت داده در دو نقطه از رودخانه و داشتن اطلاعاتی درباره محدوده تقریبی مکان رهاسازی منبع آلاینده می‌توان مکان، زمان فعالیت و تابع شدت منبع آلاینده نامشخص در رودخانه را به صورت قابل قبولی شناسایی و بازیابی کرد.

### مبانی نظری و روش‌ها

در این مقاله مکان و تابع شدت منبع آلاینده در رودخانه مجهول و هیچ گونه اطلاعات پیشینی از منبع آلاینده در رودخانه در دسترس نیست. دو نقطه مشاهداتی باید به گونه‌ای انتخاب شوند که یکی در بالادست منبع ( $a$ ) و دیگری در پایین دست منبع ( $b$ ) قرار گیرد. با توجه به اینکه در حل معکوس معادله جابه‌جایی-پراکندگی، حل مستقیم آن نیز لازم است، حل مستقیم در انتها صورت می‌گیرد. رودخانه مورد نظر به طول  $l$  به صورت زیر است:



شکل ۱. رودخانه فرضی و جانمایی منبع آلاینده و ایستگاه‌های اندازه‌گیری منحنی‌های غلظت-زمان

معادله جابه‌جایی-پراکندگی حاکم در رودخانه یادشده به صورت زیر نشان داده شده است [۶]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Rc = w(t)\delta(x - S) \quad (1)$$

$$c(x, 0) = 0, \quad c(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

در معادلات بالا،  $c$  غلظت آلاینده،  $D$  ضریب پراکندگی<sup>۱</sup>،  $V$  سرعت جریان،  $R$  ضریب واکنش<sup>۲</sup>،  $w(t)$  تابع شدت منبع آلاینده،  $\delta()$  تابع دلتای دیراک<sup>۳</sup>،  $S$  مکان منبع و  $l$  طول رودخانه است.

- 
1. Dispersion coefficient
  2. Reaction coefficient
  3. Dirac delta function

## مدل معکوس جابه‌جایی-پراکنندگی در رودخانه

کاربرد مدل معکوس انتقال آلاینده در رودخانه، تشخیص مکان و شدت منبع آلاینده توسط اندازه‌گیری توزیع مکانی و زمانی غلظت در دامنه حل است.

## ۱. شناسایی مکان منبع آلاینده در رودخانه

برای به‌دست آوردن مکان منبع آلاینده به‌صورت معکوس در رودخانه باید از رابطه زیر مکان منبع آلاینده را محاسبه و شناسایی کرد.

$$S = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \left[ \frac{\gamma \frac{Q_1}{Q_2} + \frac{e^{\frac{Dx}{r_1 - r_2}} - \theta}{r_1 - r_2}}{\gamma \frac{Q_1}{Q_2} e^{(\frac{Dx}{r_1 - r_2})} + \frac{e^{\frac{Dx}{r_1 - r_2}} - \theta}{r_1 - r_2}} \right] \quad (2)$$

معادله ۲، معادله کلی شناسایی مکان منبع آلاینده در رودخانه است.

در ادامه به روش محاسبه و معرفی ضریب‌های رابطه مکان منبع آلاینده پرداخته می‌شود، با استفاده از معادله‌های زیر می‌توان به معادله مکان منبع ارائه‌شده در بالا رسید:

$$Q_1 = \int_a^b c(x, T) \frac{e^{-\frac{Vx}{D}}}{D} \varphi_1(x) dx + \int_0^T \left[ c(a, t) + e^{-\frac{Vb}{D}} \varphi_1'(b) c(b, t) \right] dt \quad (3)$$

$$Q_2 = \int_a^b c(x, T) \frac{e^{-\frac{Vx}{D}}}{D} \varphi_2(x) dx + \int_0^T \left[ c(b, t) - e^{-\frac{Va}{D}} \varphi_2'(a) c(a, t) \right] dt \quad (4)$$

$$\frac{\varphi_2(S)}{\varphi_1(S)} = \frac{Q_2}{Q_1} \quad (5)$$

با حل معادله ۵، مکان منبع طبق معادله ۲ شناسایی می‌شود.

$\varphi_1(x)$  و  $\varphi_2(x)$  معادله‌های مذکور از حل معادلات دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آیند.

$$\varphi_1''(x) - \frac{V}{D} \varphi_1'(x) - \frac{R}{D} \varphi_1(x) = -e^{-\frac{Vx}{D}} \delta(x-a) \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(b) = 0 \quad (6)$$

$$\varphi_2''(x) - \frac{V}{D} \varphi_2'(x) - \frac{R}{D} \varphi_2(x) = -e^{-\frac{Vx}{D}} \delta(x-b) \quad \varphi_2(a) = \varphi_2(l) = 0 \quad (7)$$

معادله‌های دیفرانسیل به‌همراه شرایط مرزی در بالا ارائه شده است که با حل آنها می‌توان

$\varphi_1(x)$  و  $\varphi_2(x)$  را به‌صورت زیر استخراج کرد.

$$\varphi_1(x) = -\frac{e^{\frac{aV}{D}} \left[ e^{r_1(x-a)} - e^{r_2(x-a)} \right]}{r_1 - r_2} H(x-a) + \theta(e^{r_1 x} - e^{r_2 x})$$

$$\theta = \frac{e^{\frac{aV}{D}} \left[ e^{r_1(b-a)} - e^{r_2(b-a)} \right]}{(r_1 - r_2)(e^{r_1 b} - e^{r_2 b})}$$
(۸)

و  $\varphi_2(x)$  به صورت زیر است:

$$\varphi_2(x) = -\frac{e^{\frac{bV}{D}} \left[ e^{r_1(x-b)} - e^{r_2(x-b)} \right]}{r_1 - r_2} H(x-b) + \gamma \left[ e^{r_1 x} - e^{r_2 x + a(r_1 - r_2)} \right]$$

$$\gamma = \frac{e^{\frac{bV}{D}} \left[ r_1 e^{r_1(l-b)} - r_2 e^{r_2(l-b)} \right]}{(r_1 - r_2) \left[ r_1 e^{r_1 l} - r_2 e^{r_2 l + a(r_1 - r_2)} \right]}$$
(۹)

در معادله‌های بالا  $H()$  تابع هویساید است. پس از ارائه الگوریتم شناسایی مکان منبع آلاینده در مطالب مذکور، به چگونگی بازیابی تابع شدت منبع پرداخته می‌شود.

## ۲. شناسایی تابع شدت منبع آلاینده در رودخانه

برای شناسایی تابع شدت منبع آلاینده در رودخانه، باید سری زمانی غلظت در یک نقطه در پایین دست رودخانه، معلوم باشد همان طور که در بخش‌های قبل ذکر شد، این نقطه  $b$  نامیده می‌شود. معادله استفاده شده در این بخش معادله انتگرالی زیر است:

$$c(x, t) = \int_0^t w(\tau) G(x, x_s, t - \tau) d\tau$$
(۱۰)

در معادله بالا  $w(\tau)$  برابر با تابع شدت منبع آلاینده و  $x_s$  نیز برابر با مکان آن است.

$G(x, x_s, t)$  از رابطه زیر تبعیت می‌کند [۲۲].

$$G(x, x_s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{V(x-x_s)}{rD} - \left( \frac{r_1 V}{r_1 + D} \right) t} \times \left[ e^{-\frac{(x-x_s)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+x_s)^2}{4Dt}} \right]$$
(۱۱)

حل معادله انتگرالی ۱۰ در حقیقت حل یک مسئله معکوس خطی است که با گسسته‌سازی و تبدیل آن به یک دستگاه معادله‌های خطی شامل مقادیر گسسته تابع  $w(\tau)$  به عنوان مجهولات، انجام می‌گیرد. در این تحقیق برای گسسته‌سازی معادله ۱۰ از روش دوزنقه استفاده شده است.

دستگاه تشکیل شده در اینجا، به طور معمول دستگاهی بدخیم است و حل یک دستگاه خطی فرامعین در حالت عادی با تبدیل آن به یک مسئله حداقل مجذورات خطی، انجام پذیر است. معادله‌های زیر به ترتیب یک دستگاه فرامعین خطی، مسئله حداقل مجذورات خطی متناظر با آن و حل آن را نشان می‌دهند [۳]:

$$A_{n \times m} x_{m \times 1} = b_{n \times 1}, \quad n \geq m \quad (12)$$

$$\min_x \|Ax - b\|_r \quad (13)$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (14)$$

در معادلات بالا  $A$  برابر با ماتریس ضرایب با ابعاد  $n \times m$ ،  $x$  برابر با بردار  $m$  تایی ستونی مجهولات و  $b$  برابر با بردار  $n$  تایی ستونی ثوابت است. عملگرهای  $\|\cdot\|_r^{-1}$  و  $\|\cdot\|_r^T$  به ترتیب برای نرم درجه دوم اقلیدسی، معکوس ماتریس و ترانپوز ماتریس به کار می‌روند.

یکی از معروفترین و پرکاربردترین روش‌های تنظیم، روش تیخونوف است [۲۳]. در روش تیخونوف مسئله حداقل مجذورات خطی معمولی (معادله (۱۳))، با معادله زیر جایگزین می‌شود:

$$\min_x \|Ax - b\|_r + \lambda^r \|Kx\|_r \quad (15)$$

در رابطه بالا  $\lambda$  برابر با ضریب تنظیم و ماتریس  $K$  نیز برابر با ماتریس عملگر مشتقی است که درجه آن درجه تنظیم را نشان می‌دهد. برای تنظیم درجه صفر، ماتریس  $K$  برابر با ماتریس همانی از درجه  $m$  است. جواب مسئله به صورت زیر است [۳]:

$$x = (A^T A + \lambda^r K^T K)^{-1} A^T b \quad (16)$$

افزودن قید  $\lambda^r \|Kx\|_r$  به مسئله حداقل مجذورات خطی معمولی، مشکل بدخیم بودن مسئله را حل می‌کند. برای تعیین ضریب تنظیم،  $\lambda$ ، روش‌های مختلفی وجود دارد که از جمله آنها می‌توان به Discrepancy principle، Generalized cross-validation، F-test و L-curve اشاره کرد [۱۵]. شاید بتوان گفت پرکاربردترین روش برای تعیین ضریب تنظیم، روش L-curve است که برای تعیین ضریب تنظیم،  $\lambda$ ، از آن استفاده شده است. برای تعیین ضریب تنظیم به کمک این روش، به ازای مقادیر مختلف ضریب تنظیم،  $\lambda$ ، مسئله ۱۵ حل می‌شود و به ازای هر حل، مقدار عبارت  $\|Kx\|_r$  در برابر  $\|Ax - b\|_r$  در مقیاس لگاریتمی-لگاریتمی رسم می‌شود. شکل مذکور به صورت شکل  $L$  خواهد بود. واضح است که بهترین پاسخ برای ضریب تنظیم ( $\lambda_{opt}$ )، میزان این ضریب در گوشه این منحنی خواهد بود.

## مدل مستقیم جابه‌جایی - پراکندگی در رودخانه

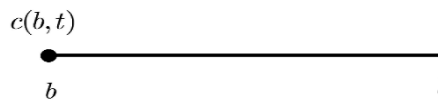
کاربرد مدل مستقیم جابه‌جایی-پراکندگی در رودخانه، محاسبه توزیع مکانی و زمانی غلظت آلاینده با معلوم بودن مکان و تابع شدت منبع آلاینده در رودخانه است. معادله ۱ به صورت زیر حل شده است [۲۲]:

$$c(x, t) = \int_0^t \int_0^l \phi(\zeta, \tau) G(x, \zeta, t - \tau) d\zeta dt \quad (17)$$

$$G(x, \zeta, t) = A e^{-\frac{V\zeta - Rt}{D}} + \frac{V}{l} e^{-\frac{V(\zeta - x)}{VD} \left( R + \frac{V}{VD} \right) t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(\zeta)}{1 + \mu_n^2} e^{-\frac{D\pi^2 n^2}{l^2} t}, \quad (18)$$

$$A = -\frac{\frac{V}{D}}{e^{-\frac{Vl}{D}} - 1}, y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \mu_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \mu_n = \frac{-Vl}{2D\pi n}$$

در این تحقیق  $c(a, t)$  و  $c(b, t)$  از اندازه‌گیری غلظت در دو ایستگاه مشاهداتی به دست آمدند. در ادامه راه حلی برای یافتن پروفیل مکانی غلظت در زمان  $T$  ارائه می‌شود. با توجه به شکل ۱، اگر رودخانه به طول  $b$  تا  $l$  در نظر گرفته شود، طبق مراحل زیر می‌توان پروفیل مکانی را محاسبه کرد.



شکل ۲. رودخانه‌ای به طول  $b$  تا  $l$

رودخانه یادشده بخشی از رودخانه شکل ۱ است. برداشت داده در مکان  $b$  باید به قدری زیاد باشد که کل غلظت آلاینده از این نقطه بگذرد. معادله جابه‌جایی-پراکندگی به‌قرار زیر است:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Rc = 0 \quad (19)$$

$$c(x, 0) = 0 \rightarrow x \in (b, l), \quad c(b, t) = d_b(t) \rightarrow t \in (0, T), \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

در معادله بالا،  $d_b(t)$  برابر با منحنی غلظت-زمان در نقطه  $b$  است. حل معادله (۱۹) با شرایط اولیه و مرزی ارائه‌شده در مطالب بالا با استفاده از معادله زیر انجام گرفته است [۲۱]:



$$c(x, t) = -D \int_0^t d_b(\tau) G(x, \cdot, t - \tau) d\tau \quad (20)$$

با توجه به حل بالا، پروفیل مکانی در طول  $b$  تا  $l$  در زمان  $T$  مشخص می‌شود. از طرفی در طول  $0$  تا  $b$  در طول رودخانه نیز پروفیل مکانی در زمان  $T$  برابر صفر است؛ پس پروفیل مکانی در طول رودخانه تنها با اندازه‌گیری سری زمانی در نقطه  $b$  به دست می‌آید.

### نتایج و بحث

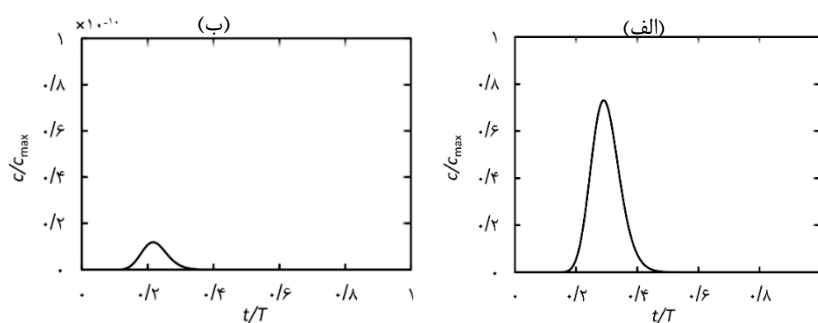
نحوه صحت‌سنجی در این بخش به این صورت است که به منحنی‌های استخراجی از مدل مستقیم خطاهای ۰ درصد، ۵ درصد و ۱۰ درصد اعمال می‌شود و نتایج حاصل از مدل معکوس با حالت دقیق ارزیابی می‌شود [۱۲]. این مدل برای دو مثال فرضی و حالت شرایط واقعی حاکم در بازه‌ای از رودخانه کارون اجرا می‌شود. مشخصات رودخانه به شرح زیر است:

جدول ۱. مشخصات رودخانه فرضی

$a$ (m)	$S$ (m)	$b$ (m)	$l$ (m)	$V$ ( $\frac{m}{s}$ )	$D$ ( $\frac{m^2}{s}$ )	$R$ ( $\frac{1}{s}$ )
۲۰۰۰	۴۰۰۰	۷۵۰۰	۱۰۰۰۰	۰/۳	۲۵	۰

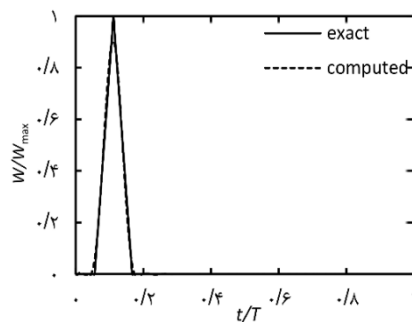
### مثال اول

در این مثال تابع شدت به صورت مثلث در نظر گرفته شده است. در ادامه منحنی‌های غلظت-زمان در دو ایستگاه از حل مستقیم معادله جابه‌جایی-پراکندگی استخراج شده است:



شکل ۳. مثال اول: منحنی غلظت-زمان در نقاط شاهد (بدون اعمال خطا)، (الف) اولین نقطه شاهد، (ب) دومین نقطه شاهد

مکان منبع در ۴۰۰۵ متری طول رودخانه محاسبه می‌شود. در ادامه شدت منبع بازیابی می‌شود:



شکل ۴. مثال اول: نتایج محاسبه منبع آلاینده با استفاده از تنظیم درجه صفر (بدون اعمال خطا)

جدول مقایسه کمی ارائه شده در زیر، نتایج مثال اول را در حالت تنظیم با درجه صفر و به ازای سطوح مختلف خطا بین مدل معکوس ارائه شده با جواب دقیق نشان می‌دهند.

جدول ۲. شاخص‌های خطا در حالت‌های مختلف مثال اول

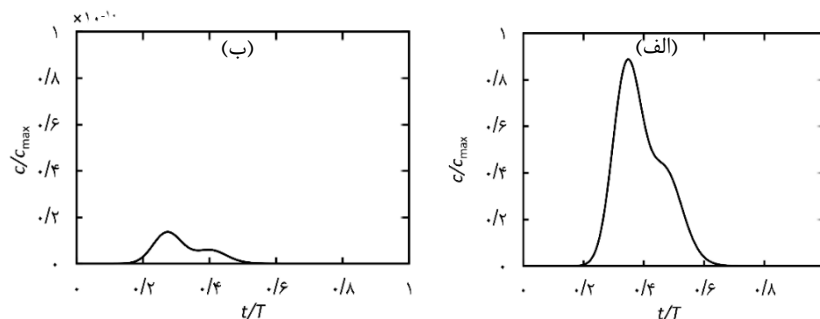
شاخص/ضریب	٪۰	٪۵	٪۱۰
$R^2$ (%)	۹۹/۹۲	۹۹/۸۱	۹۹/۶۹
$MRE$ (%)	۱/۵۲	۵/۷۱	۸/۰۵
$\lambda$	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۷۳	۰/۰۱۸

چنانکه جدول ۲ نشان می‌دهد، شاخص‌های  $R^2$  (مجذور ضریب همبستگی) و  $MRE^1$  با افزایش سطح خطای اعمال شده در داده‌های غلظت در نقاط شاهد، به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابند که این امر از نظر منطقی درست به نظر می‌رسد.

### مثال دوم

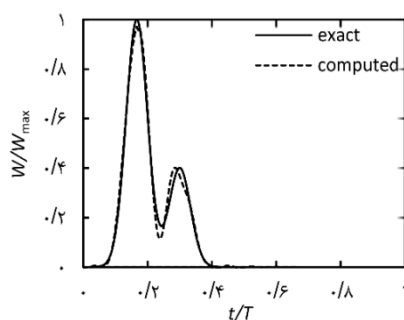
در این مثال تابع شدت به صورت دوقله‌ای در نظر گرفته شده است. در ادامه منحنی‌های غلظت- زمان در دو ایستگاه از حل مستقیم معادله جابه‌جایی-پراکنندگی استخراج شده است:

1. Mean Relative Error



شکل ۵. مثال دوم: منحنی غلظت-زمان در نقاط شاهد (بدون اعمال خطا)، الف) اولین نقطه شاهد، ب) دومین نقطه شاهد

با توجه به منحنی‌های غلظت-زمان در مطالب بالا، مکان منبع آلاینده در ۴۰۰۶ متری طول رودخانه محاسبه می‌شود. در ادامه تابع شدت منبع آلاینده بازیابی می‌شود:



شکل ۶. مثال دوم: نتایج محاسبه منبع آلاینده با استفاده از تنظیم درجه صفر (بدون اعمال خطا)

همان‌طور که در نتایج بالا مشاهده می‌شود، مکان و تابع شدت منبع آلاینده با دقت قابل قبولی محاسبه شده است. در جدول زیر شاخص‌های خطا بررسی شده است:

جدول ۳. شاخص‌های خطا در حالت‌های مختلف مثال اول

شاخص/ضریب	٪۰	٪۵	٪۱۰
$R^2$ (%)	۹۹/۸۸	۹۹/۶۳	۹۹/۳۲
MRE (%)	۳/۲	۷/۲۱	۱۱/۶۵
$\lambda$	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۸۵	۰/۰۱۷

همان گونه که در جدول ۳ ملاحظه می‌شود، شاخص‌های  $R^2$  و  $MRE$  با افزایش سطح خطای اعمال شده در داده‌های غلظت در نقاط شاهد، به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابند که این امر از نظر منطقی درست به نظر می‌رسد.

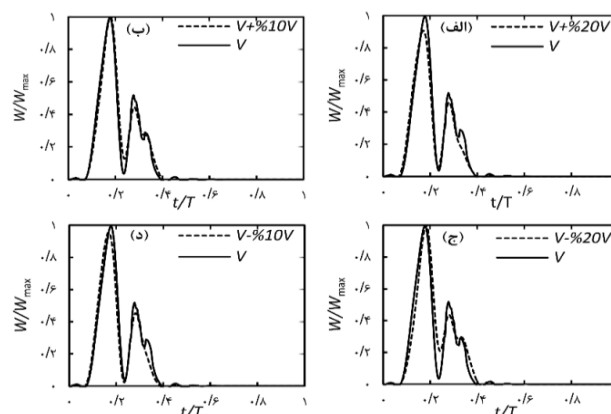
ذکر یک نکته بسیار حائز اهمیت است. مقادیر غلظت در ایستگاه اول بسیار کم است و عملاً غیرقابل اندازه‌گیری با حسگرهای موجود است، اما نکته مهم این است که مقادیر غلظت به صورت یک در طول زمان برای یافتن مکان منبع آلاینده نیاز نیست و آنچه مهم است مساحت زیر منحنی‌هاست. این مساحت زیر منحنی‌هاست که وارد محاسبات می‌شود؛ از این رو در مثال اول مقدار مساحت زیر منحنی را می‌توان از  $1/64 \times 10^{-5}$  تا  $4/12 \times 10^{-2}$  متغیر در نظر گرفت. این مقدار را در مثال دوم نیز می‌توان از  $2/6 \times 10^{-5}$  تا  $5/12 \times 10^{-2}$  متغیر در نظر گرفت.

#### تحلیل حساسیت به خطای ضریب‌ها و بحث‌های مربوط

در این بخش به ضریب‌های جریان در مثال دوم مقادیر مختلف خطا اضافه و کم شده است تا تأثیر این خطاها در نتایج مشاهده شود. تحلیل حساسیت به این معنا خواهد بود که محاسبه و برآورد شود رفتاری که برای سیستم پیش‌بینی شده تا چه حد به مقادیر متغیرهای مستقل حساس است. تحلیل حساسیت این بخش با خطای ۱۰ درصد صورت گرفته است.

جدول ۴. مثال دوم: تحلیل حساسیت خطای ضریب سرعت در شناسایی مکان منبع آلاینده

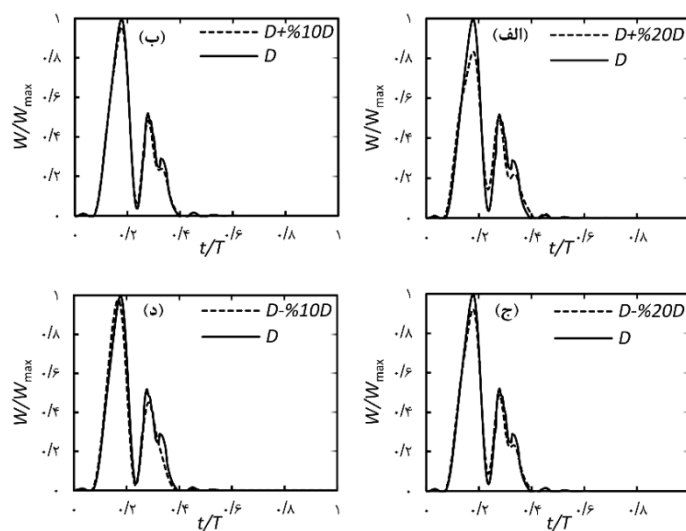
خطای ضریب‌ها	$V + \%20V$	$V + \%10V$	$V$	$V - \%10V$	$V - \%20V$
$S(m)$	۴۰۱۸	۴۰۱۵	۴۰۱۶	۴۰۱۳	۴۰۱۹



شکل ۷. مثال دوم: نمودارهای تحلیل حساسیت در خطای ضریب سرعت در بازیابی شدت منبع

جدول ۵. مثال دوم: تحلیل حساسیت خطای ضریب پراکندگی در شناسایی مکان منبع آلاینده

خطای ضریبها	$D + \%20D$	$D + \%10D$	$D$	$D - \%10D$	$D - \%20D$
$S(m)$	۴۰۲۰	۴۰۱۸	۴۰۱۶	۴۰۱۴	۴۰۱۷



شکل ۸. مثال دوم: نمودارهای تحلیل حساسیت در خطای ضریب پراکندگی در بازیابی شدت منبع

همان‌طور که در نتایج بالا مشاهده می‌شود خطای ضریب سرعت و ضریب پراکندگی تأثیر زیادی در نتایج ندارد و با تغییر این ضریب‌ها مدل می‌تواند مکان و تابع شدت منبع آلاینده را درست پیش‌بینی کند.

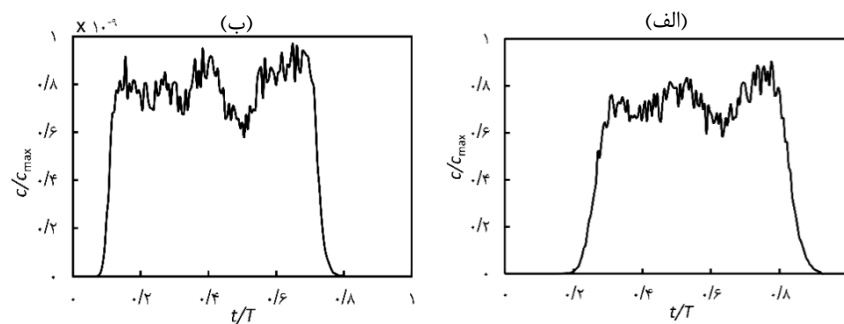
#### کاربرد مدل بازگشتی در شرایط واقعی (مطالعه موردی رودخانه کارون)

یکی از مهم‌ترین اهداف پژوهش حاضر، به‌کارگیری این مدل در شناسایی منبع آلاینده در یک رودخانه واقعی است. در همین زمینه، داده‌های حاصل از پارامترهای ماهانه کیفیت شیمیایی آب رودخانه کارون در ایستگاه اهواز به‌عنوان تابع شدت منبع آلاینده قرار گرفت (شکل ۱۵). مدل بازگشتی برای بازه‌ای به طول ۱۵ کیلومتر، ۵ کیلومتر در بالادست ایستگاه اهواز و ۱۰ کیلومتر در پایین‌دست ایستگاه اهواز در رودخانه کارون انجام گرفته است. مشخصات رودخانه به‌صورت متوسط به‌شرح زیر است:

جدول ۶. مشخصات بازه‌ای از رودخانه کارون

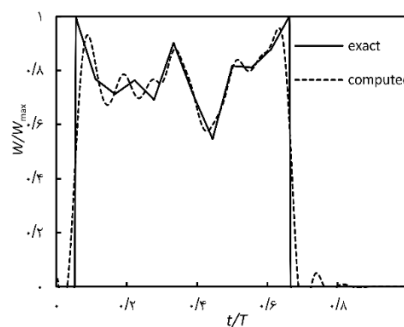
$a(m)$	$S(m)$	$b(m)$	$l(m)$	$V(\frac{m}{s})$	$D(\frac{m}{s})$	$R(\frac{1}{s})$
۲۰۰۰	۵۰۰۰	۱۲۰۰۰	۱۵۰۰۰	۰/۶	۶۵	۰

منحنی‌های غلظت-زمان با ۱۰ درصد خطا به صورت زیر است:



شکل ۹. منحنی غلظت-زمان در نقاط شاهد (با اعمال ۱۰ درصد خطا)، الف) اولین نقطه شاهد، ب) دومین نقطه شاهد.

با توجه به منحنی‌های غلظت-زمان در مطالب بالا، مکان منبع آلاینده در ۵۰۳۵ متری طول رودخانه محاسبه می‌شود؛ در ادامه تابع شدت منبع آلاینده بازایی می‌شود:



شکل ۱۰. نتایج محاسبه منبع آلاینده با استفاده از تنظیم درجه صفر (با اعمال ۱۰ درصد خطا)

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مکان و تابع شدت منبع آلاینده در حالت وجود خطای ۱۰ درصد با دقت قابل قبولی محاسبه شده است. جدول مقایسه کمی نتایج به صورت زیر است:

جدول ۷. شاخص‌های خطا در حالت ۱۰ درصد خطا

شاخص/ضریب	٪۱۰
$R^2$ (%)	۹۹/۱۰
$MRE$ (%)	۱۳/۲۴
$\lambda$	۰/۱۹

همان‌گونه که جدول ۷ نشان می‌دهد، شاخص‌های  $R^2$  و  $MRE$  با وجود اعمال ۱۰ درصد خطا باز هم نتایج قابل قبولی را نشان می‌دهند که این نشان‌دهنده عملکرد درست مدل ارائه‌شده در حالت واقعی حاکم بر رودخانه است.

### نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر با برداشت منحنی غلظت-زمان در دو نقطه از رودخانه، مکان، زمان فعالیت و تابع شدت منبع آلاینده نامشخص در رودخانه به دست آمد. این کار در رودخانه بدون داشتن هیچ‌گونه اطلاعات پیشینی از منبع و تنها با دانستن محدوده تقریبی تخلیه منبع آلاینده در چارچوب کاملاً ریاضی انجام گرفت. یافتن تابع شدت منبع آلاینده با استفاده از یک معادله انتگرالی انجام گرفت؛ سپس با گسسته‌سازی معادله انتگرالی، دستگاه معادلات خطی با شدت‌های منبع آلاینده به‌عنوان مجهولات دستگاه تشکیل داده شد. با توجه به بدخیم بودن دستگاه حاصل، برای حل آن از روش حداقل مجزورات خطی تنظیم‌شده استفاده شد. این مدل توسط دو مثال فرضی با توابع شدت مختلف با حالت دقیق ارزیابی شد. از آنجا که برداشت داده در رودخانه با خطا همراه است، در این پژوهش به داده‌های به‌دست‌آمده از حل مستقیم علاوه بر حالت بدون اعمال خطا، خطای ۵ درصد و ۱۰ درصد هم اعمال شد. در این تحقیق همچنین به ضریب‌های جریان، خطا وارد شد تا خطای حاصل در نتایج شناسایی مکان و ارزیابی تابع شدت منبع آلاینده مشاهده شود. نتیجه نشان داد که این مدل حساس به خطای ضریب‌ها نیست. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده در بخش‌های پیشین می‌توان نتیجه گرفت که این مدل قادر است به خوبی به شناسایی و ارزیابی منبع آلاینده ناشناخته در رودخانه بپردازد از آنجا که نمی‌توان فقط با استفاده از مثال‌های فرضی به این نتیجه مهم رسید، مدل بازگشتی مذکور به‌صورت موردی در بازه‌ای از رودخانه کارون بررسی و نتایج با حالت واقعی مقایسه شد. نتایج حاکی از توانایی این مدل در حالت واقعی رودخانه نیز است.

## منابع

- [۱]. قانع، علیرضا؛ مظاهری، مهدی؛ و محمدولی سامانی، جمال. (۱۳۹۵). «کاربرد مدل احتمال برگشتی در ردیابی منابع آلاینده در رودخانه در شرایط وجود جریان غیریکنواخت»، *محیط‌شناسی*، (۴۲:۲)، ۳۹۷-۴۱۰. 10.22059/JES.2016.58742
- [۲]. قانع، علیرضا؛ مظاهری، مهدی؛ و محمدولی سامانی، جمال. (۱۳۹۶). «ردیابی مکان و زمان رهاسازی آلاینده در رودخانه براساس مدل ترکیبی آنالیز الحاقی و بهینه‌سازی»، *مهندسی عمران شریف*، (۳۳:۲:۳:۲)، ۹۵-۱۰۴. 10.24200/J30.2017.20111
- [3]. Aster, R.C.; Borchers, B.; & Thurber, C.H. (2005). *Parameter Estimation and Inverse Problems*. San Diego, Elsevier Academic Press. ISBN: 9780123850492.
- [4]. Atmadja, J.; & Bagtezoglu, A.C. (2001). "pollution source identification in heterogeneous porous media", *Water Resources Research*, 37(8): 2113-2125. doi: 10.1029/2001WR000223 .
- [5]. Bagtzoglou, A.C.; & Atmadja, J. (2003). "Marching-jury backward beam equation and quasi-reversibility methods for hydrologic inversion: Application to contaminant plume spatial distribution recovery", *Water Resources Research*, 39(2). doi: 10.1029/2001WR001021
- [6]. Chapra, S.C. (1997). *Surface water-quality modeling*, Vol. 1, McGraw-Hill New York. ISBN: 0070113645.
- [7]. Cheng, W.P. & Jia, Y. (2010). "Identification of contaminant point source in surface waters based on backward location probability density function method", *Advances in Water Resources*, 33(4): 397-410. doi: 10.1016/j.advwatres.2010.01.004.
- [8]. Colaco, M.J.; Orlanda, H.R.B.; & Dulikravich, G.S. (2006). "Inverse and optimization problems in heat transfer", *Journal of Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 28, no .1, pp. 1-24. doi: 10.1590/S1678-58782006000100001.
- [9]. El Badia, A.; Ha-Duong, T.; & Hamdi, A. (2005). "Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation: application to a pollution source problem", *Inverse Problems*, 21 (2005) 1-17. doi: 10.1088/0266-5611/21/3/020.
- [10]. Ghane, A.; Mazaheri, M.; & Mohammad Vali Samani, J. (2016). Location and release time identification of pollution point source in river networks based on the Backward Probability Method. *J Environ Manage*, (180)164-171. doi: 10.1016/j.jenvman.2016.05.015.
- [11]. Hamdi, A. (2009). "The recovery of a time-dependent point source in a linear transport equation: application to surface water pollution", *Inverse Problems*, 25(7): 075006. doi: 10.1088/0266-5611/25/7/075006.



- [12]. Hamdi, A.; & Mahfoudhi, I. (2013). "Inverse source problem in a one-dimensional evolution linear transport equation with spatially varying coefficients: application to surface water pollution", *Inverse Problems in Science and Engineering*, 21(6): 1007-1031. doi: 10.1080/17415977.2013.764871.
- [13]. Hamdi, A.; Mahfoudhi, I.; & Rejaiba, A. (2015). "Identification of time active limit with lower and upper bounds of total amount loaded by unknown sources in 2D transport equations", *Journal of Engineering Mathematics*, 97(1): 101-117. doi: 10.1007/s10665-015-9799-5.
- [14]. Hamdi, A. (2012). "Inverse source problem in a 2D linear evolution transport equation: detection of pollution source", *Inverse Problems in Science and Engineering*, 20(3): 401-421. doi: 10.1080/17415977.2011.637207.
- [15]. Hansen, P.C., (1997). *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*, Philadelphia: Siam.
- [16]. Ling, L.; Yamamoto, M.; Hon Y. C.; & Takeuchi, T. (2006). "Identification of source locations in two-dimensional heat equations", *Inverse Problems in Science and Engineering*, 22(4): 591-608. doi: 10.1088/0266-5611/22/4/011.
- [17]. Michalak, A.M.; & Kitanidis, P.k. (2004). "Estimation of historical groundwater contaminant distribution using the adjoint state method applied to geostatistical inverse modeling", *Water Resources Research*, Vol. 40, W08302. doi: 10.1029/2004WR003214.
- [18]. Milnes, E.; & perrochet, P. (2007). "Simultaneous identification of a single pollution point source location and contamination time under known flow field conditions", *Advances in Water Resources*, 30(12): 2439-2446. doi: 10.1016/j.advwatres.2007.05.013.
- [19]. Mazaheri, M.; Mohammad Vali Samani, J.; & Samani, H.M.V. (2015). "Mathematical Model for Pollution Source Identification in Rivers", *Environmental Forensics*, 16(4): 310-321. doi: 10.1080/15275922.2015.1059391.
- [20]. Neupauer, R.M.; Borchers, B.; & Wilson J.L. (2000). "Comparison of inverse methods for reconstructing the release history of a groundwater contamination source", *Water Resources Research*, vol. 36, no. 9, pp. 2469-2475. doi: 10.1029/2000WR900176.
- [21]. Neupauer, R.M.; & Wilson J.L. (2005). "Backward probability model using multiple observations of contamination to identify groundwater contamination sources at the Massachusetts Military Reservation", *Water Resources Research*, vol. 41, W02015. doi: 10.1029/2003WR002974.
- [22]. Polyanin, A.D. (2001). *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Florida: Chapman & Hall/CRC. ISBN: 9781466581456.
- [23]. Tikhonov, A.N.; & Arsenin, V.Y. (1977). *Solutions of Ill-Posed Problem*, Washington, D.C: Winston & Sons. doi: 10.1137/1021044.

- 
- [24]. Wang, Z.; & Liu, J. (2008). *Identification of the pollution source from one-dimensional parabolic equation models*. Applied Mathematics and Computation, In press. doi: 10.1016/j.amc.2008.03.014.
- [25]. Wang, Z.; & Liu, J. (2012). "Identification of the pollution source from one-dimensional parabolic equation models", *Applied Mathematics and Computation* 219(8), 3403-3413. doi: 10.1016/j.amc.2008.03.014.
- [26]. Zhang, T.; & Chen, Q. (2007). "Identification of contaminant sources in enclosed space by a single sensor", *Indoor Air*, 17(6), 439-449. doi: 10.1111/j.1600-0668.2007.00489.x.